Υποψήφιες ερωτήσεις προφορικών εξετάσεων, «Απειροστικός Λογισμός ΙΙ»

Δήμογλου Κωνσταντίνος

Υποψήφιες Ερωτήσεις

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Σειρές Πραγματικών Αριθμών.

Πότε λέμε ότι μία σειρά πραγματικών αριθμών συγκλίνει; Δίνεται η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} x^n$. Ποιο το όριο αυτής; Υπάρχει για όλες τι τιμές των $x \in \mathbb{R}$; Για μία σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, αν $x_n \to 0$, τότε μπορεί η δοθήσα σειρά να συγκλίνει; Ισχύει το αντίστροφο; Επίσης, αν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων αυτής είναι φραγμένη, τότε μπορεί η δοθήσα σειρά να συγκλίνει; Πότε το τελευταίο ερώτημα ισχύει καταφατικά; Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ έτσι ώστε η $\sum_{n=1}^{\infty}(2x_n + 3y_n)$ να συγκλίνει, τότε είναι αληθές ότι τουλάχιστον μία από τις επιμέρους σειρές συγκλίνει; Ισχύει το αντίστροφο; Περιγράψτε με απλά λόγια τι μας λέει το Κριτήριο Σύγκλισης σειρών του Cauchy. Για ποιες τιμές του $p > 0$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει; Περιγράψτε το Κριτηρίου Σύγκρισης και Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης σειρών. Έστω $x_n \geq 0,\ n \in \mathbb{N}$, ένα $p > 1$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε είναι σωστό ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} {x_n}^p$ συγκλίνει; Αν επιπλέον $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, τότε είναι σωστό ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} {x_n}^p y_n$ συγκλίνει; Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει $(x_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N})$, τότε είναι δυνατόν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ να συγκλίνει; Εξετάστε αν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}$$

συγκλίνουν. Να διαυπώσετε τα Κριτήρια Λόγου και Ρίζας για τη σύγκλιση σειρών. Εξετάστε αν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

συγκλίνουν. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Συμπήκνωσης (Cauchy) και το Κριτήριο Ολοκληρώματος για Σειρές; Εξετάστε αν οι σειρές

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Πότε λέμε ότι μία σειρά συγκλίνει απόλυτα; Αν μία σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε η σειρά συγκλίνει; Το αντίστροφο ισχύει; Διατυπώστε τα κριτήρια Dirichlet και Liebnitz για σειρές. Να εξετάσετε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$ συγκλίνει. Να δώσετε το ορισμό της ακτίνας σύγκλισης μιας δυναμοσειράς. Απαντήστε με σωστό ή λάθος (αιτιολογώντας την απάντησή σας).

(i) Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από το 1.

(ii) Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ αποκλίνει στο $x = 2$, τότε η δυναμοσειρά μπορεί να συγκλινει στο -1.

(iii) Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει στο $x = -2$, τότε η δυναμοσειρά μπορεί να συγκλινει στο 1.

(iv) Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει μόνο για τα $x \in (-1,1)$.

(v) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$ συγκλίνει για κάθε $x \in [-1,1]$.

(vi) Αν $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n$ συγκλίνει για κάθε $x \in (-1,1)$.

Ομοιόμορφα Συνεχείς Συναρτήσεις.

Να δώσετε τον ε-δ (αντ. τον ακολουθιακό ορισμό) ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας για μια συνάρτηση $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς (στα αντίστοιχα σύνολα).

(i) $f(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$

(ii) $f(x) = x^k,\ k = -1, 2, 3\ x \in (0, +\infty)$

(iii) $f_k(x) = x^{1/k},\ k = 2, 3,\ x \in [0, +\infty)$

(iv) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 2 & , \quad 1 < x < 2 \end{cases}$

(v) $f(x) = x^2,\ x \in [-8, 7]$

(vi) $f(x) = \ln x,\ x \in (0, +\infty)$

(vii) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x},\ x \in (0, 1]$

(viii) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x \in (0, +\infty)$.

Να χαρακτηρίσετε με **σωστό ή λάθος** (με πλήρη αιτιολόγηση) τα παρακάτω.

(i) Αν $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και $x_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$ τότε η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ έχει πεπερασμένο όριο.

(ii) Αν $f\colon (0,3) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και $x_n = 3 - \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$ τότε η ακολουθία $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν έχει όριο.

(iii) Σύνθεση δύο Lipchitz συναρτήσεων είναι Lipchitz συνάρτηση.

(iv) Σύνθεση δύο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

(v) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι Lipschitz στο $[2, +\infty)$

(vi) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι Lipschitz στο $[0, +\infty)$

(vii) Αν μια συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $(0, +\infty)$ τότε μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι ηf είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(viii) Μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση απεικονίζει ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy και αντίστροφα.

(ix) Μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση μπορεί να είναι και συνεχής μόνο όταν το πεδίο ορισμού της είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα.

Ολοκληρωτικός Λογισμός.

Δώστε τους ορισμούς των εννοιών: Άνω Άθροισμα, Κάτω Άθροισμα, Άνω Ολοκλήρωμα, Κάτω Ολοκλήρωμα και Ολοκλήρωμα Riemann για μια φραγμένη συνάρτηση $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 7 & , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}.$$

Να δώσετε τα άνω και κάτω αθροίσματα (αντ. ολοκληρώματα) της f στο $[0, 1]$. Είναι η f ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0, 1]$; Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \in \ x \in (0, 2] \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

Είναι η g ολοκληρώσιμη στο $[1, 2]$; Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$; Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2]$;
Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \in \ x \in (0, 1] \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

Η h είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$;

Με όποιον τρόπο θέλετε εξηγήστε γιατί η συνάρτηση $f(x) = x - x^2$, $x \in [0, 1]$ είναι ολοκληρώσιμη.

Απαντήστε με σωστό ή λάθος τα παρακάτω (με πλήρη αιτιολόγηση).

- Αν μία συνάρτηση $f \colon [-3, 7] \to \mathbb{R}$ έχει μόνο 1 σημεία ασυνέχειας στο στο $[-3, 7]$ είναι βέβαιο ότι η συνάρτηση f ολοκληρώσιμη στο $[-3, 7]$;
- Αν $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με $f = 0$ εκτός από ένα πεπερασμένο το πλήθος σημεία στο $[a, b]$, τότε $\displaystyle\int_a^b f = 0$;
- Έστω $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση για την οποία υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ για την οποία $U(f, P) = L(f, P)$. Τότε, η f είναι σταθερή.
- Αν $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε f συνεχής.
- Έστω $f \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής και με $f([0, 1]) = [0, 2]$. Τότε, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx > 0$.

• Έστω μια φραγμένη συνάρτηση $f\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[1,x],\ x>1$ Τότε, το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt,\ x\geq 1$ είναι πάντα συνεχής συνάρτηση και παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$.

Να διατυπώσετε τα δύο Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού που γνωρίζετε (και μάλιστα το δεύτερο στη γενικότητά του). Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμό το οποίο γνωρίζετε (στη γενικότητά του).

Εξετάστε ποια από τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx,\ \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ συγκλίνουν (με όποιο τρόπο θέλετε). Απαντήστε αν το ακόλουθω είναι σωστό ή λάθος. Αν υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_{-x}^{x} f(t)dt := k\in\mathbb{R}$, τότε $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = k$. Διατυπώστε το Κριτήριο Σύγκρισης Γενικευμένων Ολοκληρωμάτων (και για τύπου I και για τύπου II).